

1. Dependència del Camp Magnètic d'un Imant amb la Distància¹ (Problema Experimental).

Puntuació total: 25p. Una brúixola és un dispositiu que ens permet navegar i orientar-nos geogràficament gràcies al camp magnètic terrestre.

Un grup d'estudiants de segon de Batxillerat, inspirats en les pel·lícules i programes de supervivència, decideixen construir una brúixola casolana al laboratori de Tecnologia del seu institut amb un imant cilíndric penjat d'un fil (imant **A** a la **Figura 1**). Quan es deixa anar, l'imant s'orienta alineant-se amb el camp magnètic terrestre. La professora, veient l'entusiasme del grup, els proposa un repte: a partir de la seva brúixola, construir un dispositiu experimental per a veure la dependència del camp magnètic d'un imant amb la distància i determinar el valor del camp magnètic de la Terra.

Per a fer-ho, enganxen un bastonet prim a l'imant **A**, que els permet mesurar fàcilment angles quan a sota hi col·loquen un transportador, deixant una distància entre aquest i l'imant perquè l'imant pugui girar lliurement. A més, fan coincidir la direcció de l'imant **A** amb la direcció 0-180° del transportador, que és la direcció entre els pols Nord-Sud de la Terra.

Finalment, en la direcció perpendicular a l'eix Nord-Sud, és a dir, en direcció Est-Oest, hi col·loquen un altre imant **B** sobre un petit suport perquè els dos imants estiguin a la mateixa altura.



Figura 1. Esquema del muntatge experimental.

Quan l'imant **B** es troba a una distància r de l'imant **A**, aquest últim s'orienta en un camp magnètic que és la suma vectorial del camp magnètic de la Terra B_H (només considerarem la component horitzontal del camp magnètic de la Terra) i del camp magnètic de l'imant **B** (que anomenarem B_m), de manera que gira un angle (**Figura 2**) que es pot mesurar amb el transportador.

¹ Problema adaptat de l'experiment proposat a l'Olimpiada Española de Física de 2007.

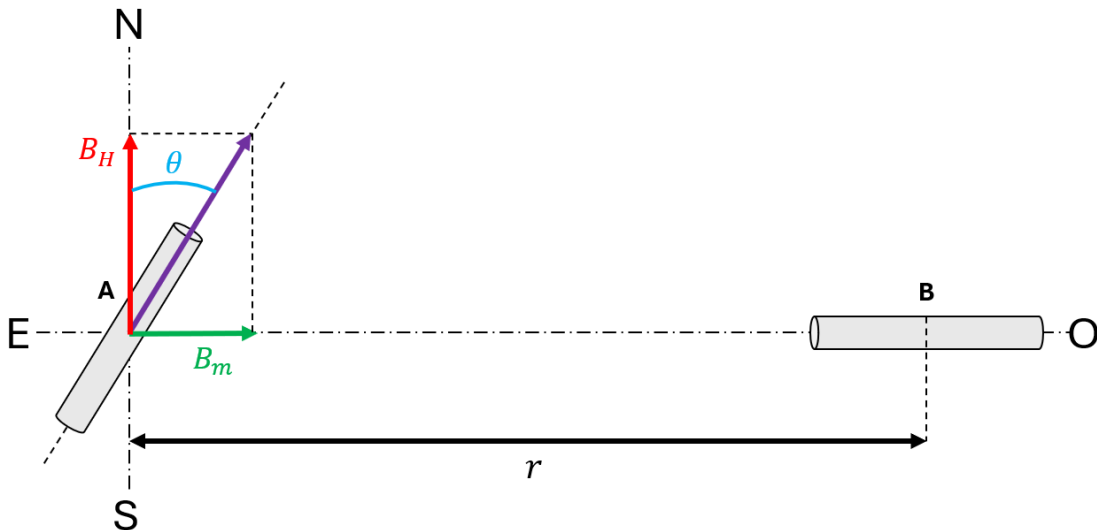


Figura 2. Esquema del gir de l’imant **A** per la influència de l’imant **B**.

Tot variant la distància r , els alumnes mesuren l’angle corresponent i preparen la taula següent de resultats experimentals:

$r(\text{m})$	$\theta\ (^{\circ})$
0.38	7.0
0.36	7.5
0.34	8.5
0.32	10.5
0.30	12.5
0.28	14.5
0.26	19.0
0.24	23.5
0.22	29.5
0.20	38.0

Taula 1. Valors experimentals.

Si ara suposem que el camp magnètic B_m creat per un imant a una distància r és:

$$B_m = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{r^n} \tag{1}$$

on μ_0 és una constant que depèn del medi (en aire té un valor de $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$) i m és el moment magnètic de l’imant, que caracteritza la seva "potència". L'exponent n és un nombre enter que indica de quina manera el camp magnètic creat per un imant decreix amb la distància.

D'acord amb la **Figura 2**, l'imant **A** s'orienta de manera que la tangent de l'angle θ compleix:

$$\tan \theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{B_H r^n} \quad (2)$$

A partir de les dades proporcionades, es demana:

- a) Transformar l'equació (2) en una altra on es posi de manifest la dependència lineal entre $\log(\tan \theta)$ i $\log r$. **5p**
- b) Representar gràficament $\log(\tan \theta)$ en funció de $\log r$. **5p**
- c) Trobar el pendent de la representació i calcular el valor de n . **5p**
- d) Trobar la incertesa (error relatiu) en el valor de n que s'ha calculat a l'apartat c). **5p**
- e) Calcular el valor de m/B_H (en unitats del SI). **5p**

2. Excrecions antàrtiques. Puntuació total: 25p. El pingüí d'Adèlia (*Pygoscelis adeliae*) és una espècie de pingüí present al llarg de tota la costa del continent antàrtic, que és l'únic lloc on es troba. És l'espècie de pingüí més estesa i, juntament amb el pingüí emperador, és la que habita més al sud de totes. Els pingüïns d'Adèlia obtenen el seu aliment tant per depredació com per recerca activa, amb una dieta basada principalment en krill i peix. Aquesta espècie de pingüïns, quan coven, no volen deixar sols els seus ous a la intempèrie, de manera que la parella progenitora fa torns per cercar aliment. Ara bé, si el pingüí que es troba covant necessita alleugerir-se, tampoc pot abandonar el niu, ni pot defecar allà mateix, doncs correria el risc de contaminar el niu.

Afortunadament, els pingüïns d'Adèlia han desenvolupat un mecanisme que els permet seguir covant els ous i excretar: es desplacen fins a la vora del niu, que sol trobar-se sobre roques, giren d'esquena al niu, s'inclinen cap endavant, aixequen la cua i *disparen*, tal i com es pot veure en la **Figura 3**.² El material expulsat arriba a una distància considerable de l'ocell i deixa una taca blanquinosa o rosada, en funció del tipus d'alimentació, que pot acabar a pocs centímetres de la perifèria del niu i arribar a tenir una amplada d'1 cm.



Figura 3. Un pingüí d'Adèlia, alleugerant-se.

Aquesta curiosa manera d'anar de ventre ha generat nombroses recerques^{3,4} al llarg dels anys, i s'han desenvolupat models per entendre la mecànica i els paràmetres de la defecació

² Podeu trobar un vídeo interessant al respecte en aquest enllaç:

<https://www.youtube.com/watch?v=dCQVci2IXag>

³ Meyer-Rochow, V.B., Gal, J. *Pressures produced when penguins pooh—calculations on avian defaecation*. *Polar Biol* **27**, 56–58 (2003). <https://doi.org/10.1007/s00300-003-0563-3>

⁴ Hiroyuki Tajima, Fumiya Fujisawa, *Projectile Trajectory of Penguin's Faeces and Rectal Pressure Revisited*, arXiv:2007.00926, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.00926>

dels pingüins d'Adèlia. En aquest problema farem el mateix, a partir del model que es mostra a l'esquema de la **Figura 4**.

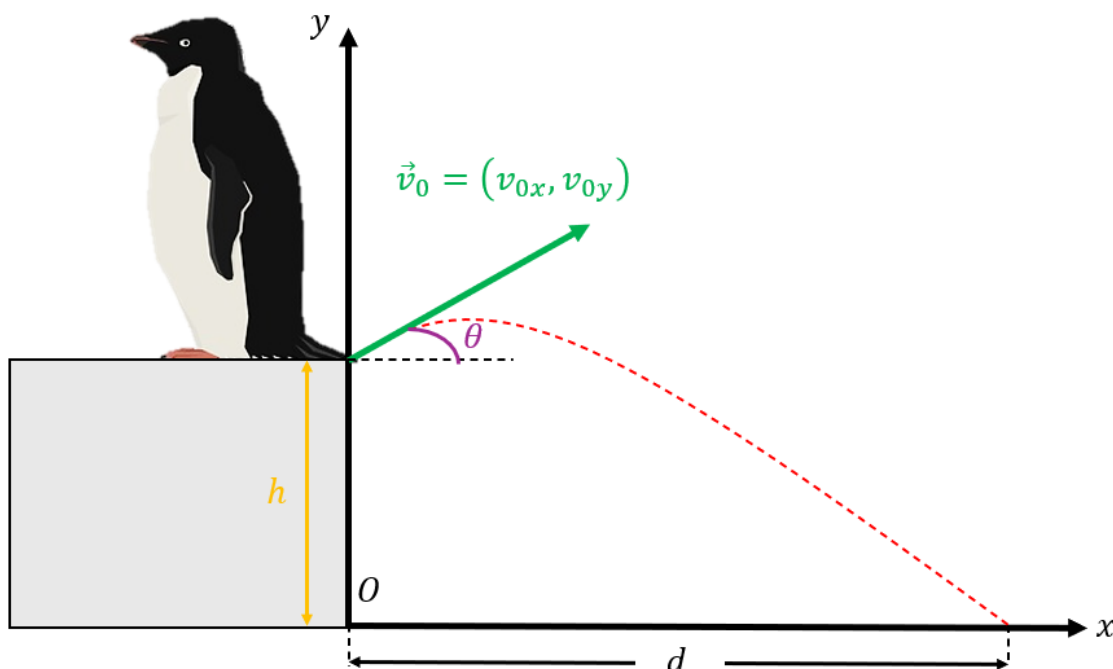


Figura 4. Esquema del model d'excreció del pingüi d'Adèlia considerat.

A partir d'aquest model es demana:

- Trobar una expressió matemàtica pel temps de vol, t_v , de la matèria fecal, en funció de v_0 , h , θ i l'acceleració de la gravetat, g . **5p**
- Trobar una expressió algebraica per a la distància màxima assolida per la matèria fecal d respecte al pingüi, en funció dels paràmetres v_0 , $\cos \theta$, h i l'acceleració de la gravetat, g . **2p**
- Demostrar que l'angle màxim per al qual s'obté la distància màxima de defecació, $\theta_{m\grave{a}x}$, és:

$$\theta_{m\grave{a}x} = \arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right)}} \right] \quad \mathbf{3p}$$

- Obtenir una expressió matemàtica per a la distància màxima $d_{m\grave{a}x}$ de defecació. **Nota:** empreu els resultats dels apartats a) i b) per a fer-ho. **3p**

Per tal de modelitzar les pressions intestinals que fan capaços als pingüins d'Adèlia d'aquesta proesa, prenem ara l'esquema de la **Figura 5**, on assumim que el sistema intestinal del pingüi és un cilindre d'alçada z , radi R i volum V , i el teorema de Bernoulli per a líquids no-viscosos:

$$\rho g z + P_a + P_0 = \frac{1}{2} \rho v_0^2 + P_0 \quad (1)$$

On P_0 correspon a la pressió atmosfèrica, P_a la pressió intestinal i ρ la densitat de la matèria fecal.

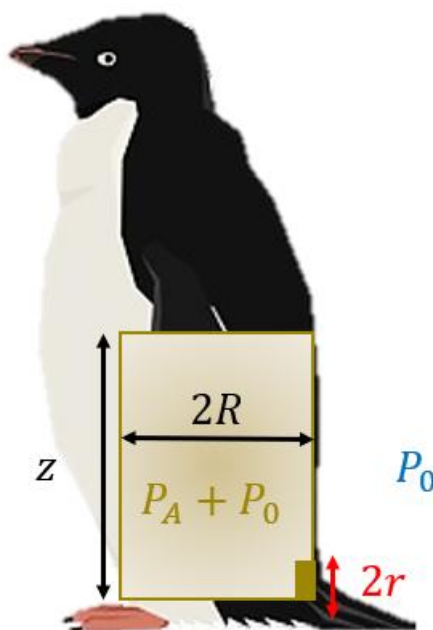


Figura 5. Model de pressions intestinals per al pingüí d'Adèlia.

Algunes recerques han estimat que, per a un tir rasant ($\theta = 0^\circ$), el volum de fluid execrable es pot escriure com:

$$V = \frac{C\pi r^2}{2g} \left[g t_v \sqrt{g^2 t_v^2 + v_0^2} - v_0^2 \ln \left\{ \frac{\sqrt{g^2 t_v^2 + v_0^2} - g t_v}{v_0} \right\} \right] \quad (2)$$

On C és l'anomenat coeficient de contracció, adimensional.

A partir de les estimacions dels equips d'investigació, que estableixen que, per a un tir rasant, $v_0 \approx 2$ m/s, i proposen les següents dades biomètriques dels pingüins d'Adèlia: $R = 0.1$ m, $h = 0.2$ m, $r = 0.004$ m, $\rho = 1141$ kg/m³, així com un valor típic de $C \approx 0.611$, prenent $g = 9.8$ m/s², es demana:

- Determinar la distància d a la que arribaran els excrements dels pingüins. **5p**
- Determinar la pressió P_A necessària per assolir aquesta distància d . Doneu el resultat en kPa. **5p**
- Fins on arribarien els excrements dels pingüins d'Adèlia si considerem $h = 2$ m? Com podria afectar això a l'hora de dissenyar les instal·lacions per a tenir pingüins d'Adèlia en captivitat en un zoològic o aquari (per a la discussió preneu com a referència una alçada promig de persona de 1.7 m)? **2p**

- 3. Errors en mesures elèctriques. Puntuació total: 25p.** Tot aparell de mesura elèctrica (voltímetre, amperímetre) té una certa resistència interna, i en connectar-lo a un circuit en modifica les seves condicions, i per tant, introdueix un cert error. Per tal de reduir l'error en la mesura dels voltímetres (que es connecten en paral·lel) aquests tenen una resistència R_V elevada, d'aquesta manera s'eviten "fuites" d'intensitat de corrent elèctric per l'aparell, amb la conseqüent caiguda de potencial. En el laboratori de mesures elèctriques d'una empresa d'il·luminació, es connecta un voltímetre a un circuit, tal i com il·lustra la **Figura 6**.

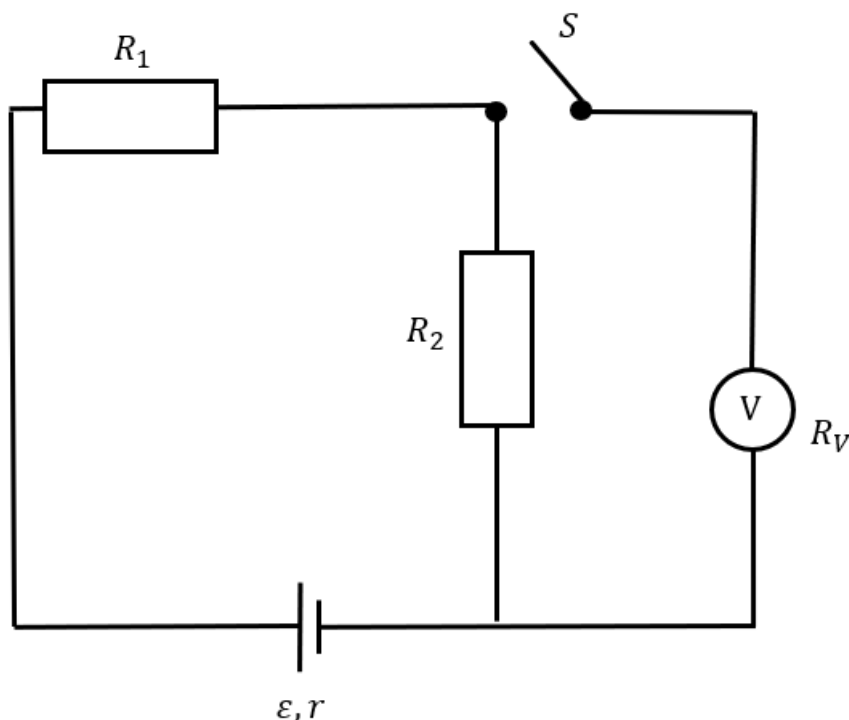


Figura 6. Esquema del circuit emprat.

Tenint en compte les dades següents: $\varepsilon = 15 \text{ V}$, $r = 0.1 \Omega$, $R_1 = 19.9 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, es demana:

- Calcular la diferencia de potencial (ddp) entre els bornes de la resistència R_2 i la intensitat I , que circula pel circuit quan el voltímetre no està connectat. **5p**
- Si ara es connecta el voltímetre, tot tancant l'interruptor S , calcular el valor de la seva resistència R_V per tal que l'error de la seva mesura sigui del 0.1%. **5p**

El circuit de la Figura 6 es vol fer servir per fer un test de qualitat de llums LED. Substituirem la resistència R_2 per una bombeta LED que treballa a 5V i amb una intensitat de corrent de 250 mA. Sabent que la resistència del voltímetre emprat per aquesta mesura és $R'_V = 5\text{k}\Omega$:

- Determineu el valor de la resistència R'_1 que ha de substituir a la resistència R_1 per tal que la bombeta treballi en les condicions desitjades. **4p**

- d) Sabent que la potència útil lluminosa de les bombetes LED emprades és un 80% del seu consum elèctric, determineu la potència generada a la pila i el percentatge de potència útil (lluminosa) del circuit. **4p**

Es modifica ara el circuit de la **Figura 6** tal i com es mostra en la **Figura 7**.

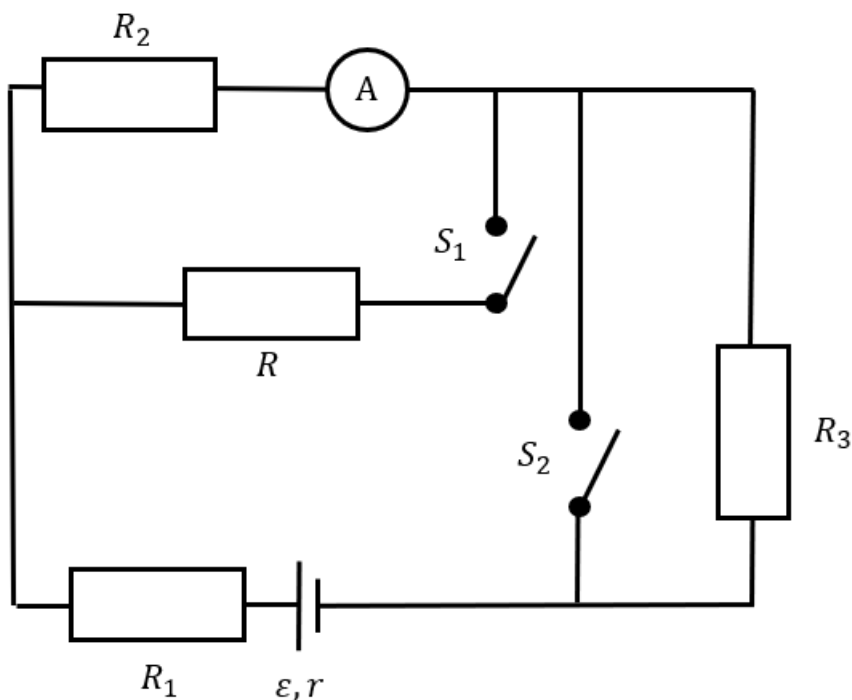


Figura 7. Esquema del circuit modificat.

Si se suposa que la resistència de l'amperímetre és negligible, i que aquest marca la mateixa intensitat quan els dos interruptors S_1 i S_2 estan oberts que quan estan tancats, tenint en compte les dades següents: $\varepsilon = 15 \text{ V}$, $r = 0.1 \Omega$, $R_1 = 349.9 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_3 = 50 \Omega$, es demana:

- e) Determinar el valor de la resistència R . **7p**

4. Politges i olis en el laboratori de Mecànica. Puntuació total: 25p. Les politges són sense cap dubte un invent molt útil a l'hora de desplaçar objectes massius. Les podem trobar en moltíssimes aplicacions: en les grues emprades en construcció o en la descàrrega de carregaments de vaixells, en els decorats i telons d'un teatre o fins i tot en un equip bàsic d'escalada. Un cas interessant és el de la combinació d'una politja fixa amb una de mòbil, el que es coneix habitualment com a polispast, un dispositiu que introdueix un gran avantatge mecànic i permet desplaçar els pesos amb un menor esforç.

Un grup d'alumnes del Grau de Física estan estudiant aquest sistema en un laboratori de Mecànica tot emprant un dispositiu com el de la figura següent:

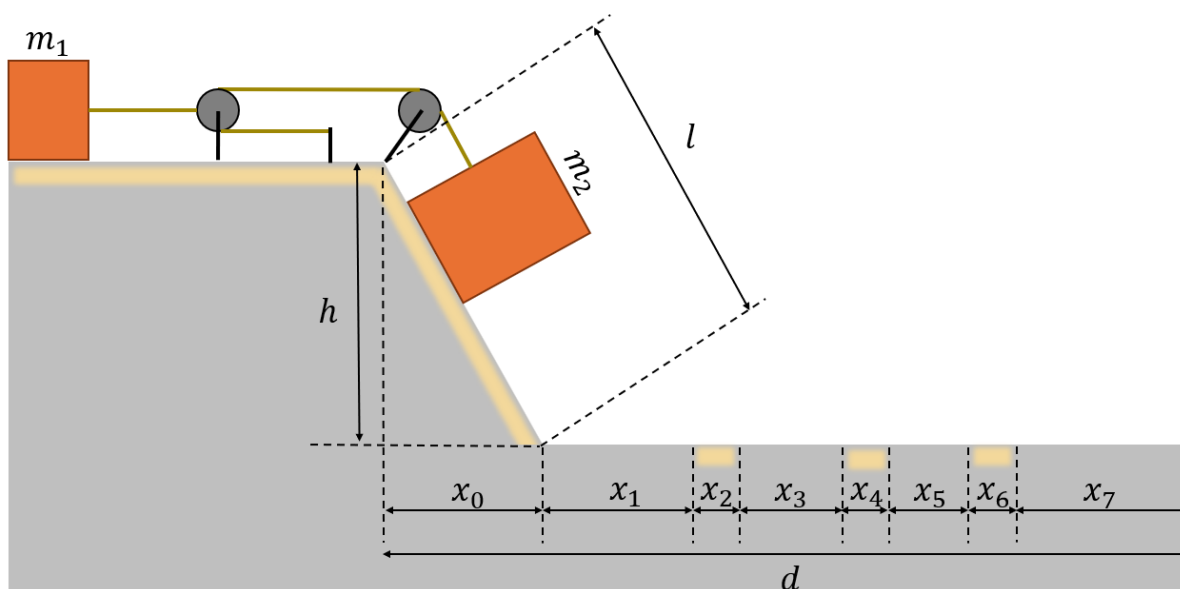


Figura 8. Esquema del muntatge en el laboratori. Les distàncies no estan a escala.

Als alumnes que estan treballant amb aquest dispositiu experimental se'ls demana que impregnin la superfície de la taula de laboratori d'un oli especial que manté al bloc m_1 sense fregament amb la taula. A partir d'aquí es demana:

- Fer el diagrama del cos lliure de tots els elements del sistema. **2p**
- Determinar la relació entre la distància d_1 recorreguda per la massa m_1 i la distància d_2 recorreguda per la massa m_2 en un cert interval de temps Δt . **3p**
- Demostrar que la relació entre les acceleracions de m_1 i m_2 és: $a_2 = 2a_1$, i determinar una expressió algebraica per a les acceleracions a_1 i a_2 que depengui només de la massa dels blocs, h , l i de l'acceleració de la gravetat, g . **5p**
- Determinar la tensió de la corda en funció dels valors de massa, m_1 i m_2 , h , l i de g . **5p**

A la pràctica, el grup d'estudiants treballa amb les següents dades:

m_1 (kg)	m_2 (kg)	l (cm)	h (cm)
0.1	0.5	57	56

Malauradament, en el moment en què volen comprovar experimentalment el que acaben de determinar a nivell teòric, i deixen anar el bloc m_2 , se n'adonen que no han lligat la corda a aquest, de manera que el bloc m_2 comença a lliscar per el pla inclinat des del repòs.

e) Determinar la velocitat amb què m_2 arriba al pla horitzontal. **5p**

El terra del laboratori (pla horitzontal) presenta un coeficient de fregament homogeni $\mu = 0.1$, tret d'algunes seccions on a un dels estudiants més sapastres (el mateix que s'ha oblidat de lligar el bloc) li han caigut gotes de l'oli de laboratori (com s'il·lustra a la **Figura 8**).

f) Si sabem que les zones tacades d'oli corresponen a unes distàncies $x_2 = 1.2$ m, $x_4 = 0.2$ m i $x_6 = 0.1$ m, i les zones netes corresponen a unes distàncies de $x_1 = 0.5$ m, $x_3 = 3$ m, $x_5 = 1$ m, i x_7 és desconeguda, determineu la distància d (mesurada respecte de la vertical del punt més alt del pla inclinat) a la que el bloc m_2 s'aturarà.

Nota: noteu que el dibuix de la **Figura 8** no està a escala. **5p**

- 5. A casa del luthier.** **Puntuació total: 25p.** El terme *luthier* s'utilitza per anomenar aquella persona que es dedica a la construcció i reparació d'instruments musicals de corda, com ara un dels més populars: la guitarra. Un *luthier* està treballant al seu taller i està canviant les cordes de la guitarra d'una instrumentista molt coneguda. Després de canviar la cinquena corda, que correspon a la nota La (amb una freqüència de 440 Hz per a l'armònic fonamental), la fa vibrar per comprovar que es troba correctament afinada.



Figura 9. Eixos i criteri de signes per a estudiar les ones generades a la guitarra del luthier.

Si la longitud de la corda és de 650 mm, es demana:

- Determinar la longitud d'ona d'aquesta ona. **1p**
- Determinar el període d'oscil·lació de la ona. **1p**
- Escriure l'equació d'una ona que es propagaria de dreta a esquerra sobre la corda de la guitarra, saben que l'amplitud de les seves oscil·lacions és de 5 mm. **Nota:** feu seguir la notació "dreta"-"esquerra" segons el criteri del dibuix de la **Figura 9**. **2p**
- Escriure l'equació de la ona estacionària si sabem que l'amplitud de les oscil·lacions correspon a 5 mm. **2p**
- Determinar la velocitat a la que es propaga la ona. **1p**
- Fer un esquema dels tres primers harmònics de la corda, donant les posicions dels nodes i la corresponent freqüència. **1p**
- Si sabem que la massa de la corda de la guitarra és de 1.25 g, quina seria la força de tensió F necessària per a garantir que la corda està afinada? **3p**

Com és ben conegut, en variar la tensió de la corda es varia la seva afinació (és a dir, la freqüència a la qual oscil·la). La tensió de la corda es pot escriure com:

$$F = \sigma A \quad (1)$$

On σ és l'esforç i A la secció sobre la qual s'aplica la força F . D'altra banda, l'esforç pot escriure's com:

$$\sigma = \varepsilon E \quad (2)$$

On E és l'anomenat mòdul de Young i ε és la deformació de la corda (raó entre la variació en la longitud de la corda Δl i la seva longitud natural L).

A partir d'aquestes definicions, es pot escriure la següent equació per afinar la corda en una tonalitat diferent a la del harmònic fonamental f_0 :

$$f^2 = \frac{EA}{4\mu L^3} \Delta l + f_0^2 \quad (3)$$

On $\mu = m/L$ és la densitat lineal de la corda (raó entre la massa de la corda i la seva longitud).

- h) Quina serà la tensió que haurà d'aplicar el *luthier* per doblar la freqüència en l'afinació si la corda admet variacions en la seva longitud de 0.05 mm? Comenta de manera raonada si aquest resultat té o no sentit físic, i per què. **2p**
- i) Quina freqüència s'obtindrà si es varia la longitud de la corda en 0.05 mm en tensar-la amb una tensió un 10% superior a la calculada en l'apartat g)? En vista dels resultats de l'apartat e), podríem dir que la corda està afinada? **3p**

El nostre *luthier* disposa de dues cordes de materials diferents: una d'acer ($E_a = 210$ GPa, $d = 0.05''$) i una de nylon ($E_n = 4.1$ GPa, $d = 0.01''$)⁵:

- j) Determineu les freqüències d'afinament f_a i f_n , i les tensions corresponents, per la corda d'acer i la corda de nylon, respectivament, si varia la longitud de la corda en 0.05 mm. **5p**
- k) Proposeu un experiment que permeti calibrar la freqüència d'afinació f en funció de la variació en la longitud de la corda Δl . Ajut: cal proposar una manera d'obtenir una funció matemàtica que es pugui ajustar a les dades experimentals. **2p**
- l) En el experiment que heu proposat en l'apartat h), l'ajust serà més fiable amb la corda d'acer o la de nylon? Ajut: penseu que pot passar quan les deformacions Δl de la corda es facin molt grans. **2p**

⁵ d correspon al diàmetre (gruix) de la corda i està donat en polzades. Cal tenir en compte que: $1'' = 25.4$ mm.

Solucions

1.

a) $\log(\tan\theta) = -n \log r - \log\left(\frac{\mu_0 m}{2\pi B_H}\right)$

b) -

c) $p = -2.95; n \approx 2$

d)-

e) $\frac{m}{B_H} = 3.22 \cdot 10^4 \frac{Am}{T}$

2.

a) $t = \frac{v_0 \sin\theta}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + \frac{2h}{g}}$

b) $d = v_0 \cos\theta \left\{ \frac{v_0 \sin\theta}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + \frac{2h}{g}} \right\}$

c) $\theta_{\max} = \arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right)}} \right]$

d) $d_{\max} = v_0 \cos \left\{ \arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right)}} \right] \right\} \left(\frac{v_0}{g \sqrt{2 \left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right)}} + \sqrt{\frac{v_0^2}{2g^2 \left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right)} + \frac{2h}{g}} \right)$

e) $d = 0.404 \text{ m}$

f) $P_a \approx 2.3 \text{ kPa}$

g) $d = 1.23 \text{ m}$

h) Cal que les gàbies tinguin una zona de marge de seguretat per tal que els pingüins no embrutin al públic.

3.

a) $I = 0.5 \text{ A}, V_2 = 5 \text{ V}$

b) $R_V = 6660 \Omega$

c) $R'_1 = 39.74 \Omega$

d) $W_g = 3.765 \text{ W}; W_{\% \text{útil}} = 26.5\%$

4.

a) -

b) $d_2 = 2d_1$

c) $a_2 = 2a_1; a_1 = \frac{2m_2gh}{l(4m_2+m_1)}$

d) $T = \frac{m_1 m_2 gh}{l(4m_2+m_1)}$

e) $v_0 = 3.31 \text{ m/s}$

f) $d = 7.206 \text{ m}$

5.

a) $\lambda_1 = 1.3 \text{ m}$

b) $T = 0.00227273 \text{ s}$

c) $y(x, t) = 5 \cdot 10^{-3} \cos \left[2\pi \left(\frac{x}{1.3} + 440t \right) \right]$

e) $v = 572 \text{ m/s}$

f) –

g) $F = 629.2 \text{ N}$

h) $T = 1887.6 \text{ N}$

i) $f = 637.6 \text{ Hz}$

j) $f_a = 447 \text{ Hz}; T_a = 20.46 \text{ N}; f_n = 440 \text{ Hz}; T_n = 0.016 \text{ N}$