

1. L'any 1887, el físic alemany Heinrich Hertz (1857 – 1894) va observar un fenomen que va acabar batejant-se com a **efecte fotoelèctric**: la irradiació d'un metall generava un corrent elèctric. Només hi havia corrent quan la freqüència de la radiació era superior a un determinat valor llindar; per sota no hi havia corrent, per molt intensa que fos la radiació. Aquest fenomen, que va portar de cap als físics de la darrereria del segle XIX, va poder ser explicat l'any 1905 per Albert Einstein (1879 – 1955), gràcies als treballs previs de Max Planck (1858 – 1947).

La teoria d'Einstein de l'efecte fotoelèctric estableix que la radiació es transporta en unes unitats (fotons) que tenen la capacitat d'arrencar electrons de la superfície metàl·lica. Si un fotó té una energia per sobre d'un determinat valor llindar (aquest valor s'anomena treball d'extracció, W_0 , i és característic de cada metall) es pot expulsar un electró amb una energia cinètica igual a la diferència entre l'energia del fotó i el treball d'extracció:

$$E_c = E_v - W_0 \quad (1)$$

On E_c representa l'energia cinètica dels electrons arrencats i E_v l'energia dels fotons emprats en l'experiment. Si l'energia dels fotons és inferior al treball d'extracció, no s'emeten electrons.

D'acord amb els treballs de Planck, l'energia dels fotons és proporcional a la freqüència de la radiació, d'acord amb l'equació:

$$E_v = h\nu \quad (2)$$

Essent h l'anomenada constant de Planck i ν la freqüència de la radiació electromagnètica. Tenint en compte que la freqüència ν i la longitud d'ona λ compleixen $c = \lambda\nu$, on c és la velocitat de la llum, l'expressió anterior es pot reescriure com:

$$E_v = \frac{hc}{\lambda} \quad (3)$$

L'energia cinètica dels electrons emesos es pot determinar frenant-los amb un potencial V que es va augmentant fins que no es detecta el corrent fotoelèctric. El treball que fa el camp elèctric per frenar els electrons és $W = eV$, on e és la càrrega de l'electró. El mínim potencial necessari per aturar els electrons s'anomena potencial de frenada V_s .

En un experiment d'efecte fotoelèctric s'ha irradiat un metall desconegut amb radiació electromagnètica de longitud d'ona variable. Per tal de determinar el potencial de frenada, s'ha emprat una font de potencial (tensió o voltatge) variable. El muntatge es veu a la figura següent¹.

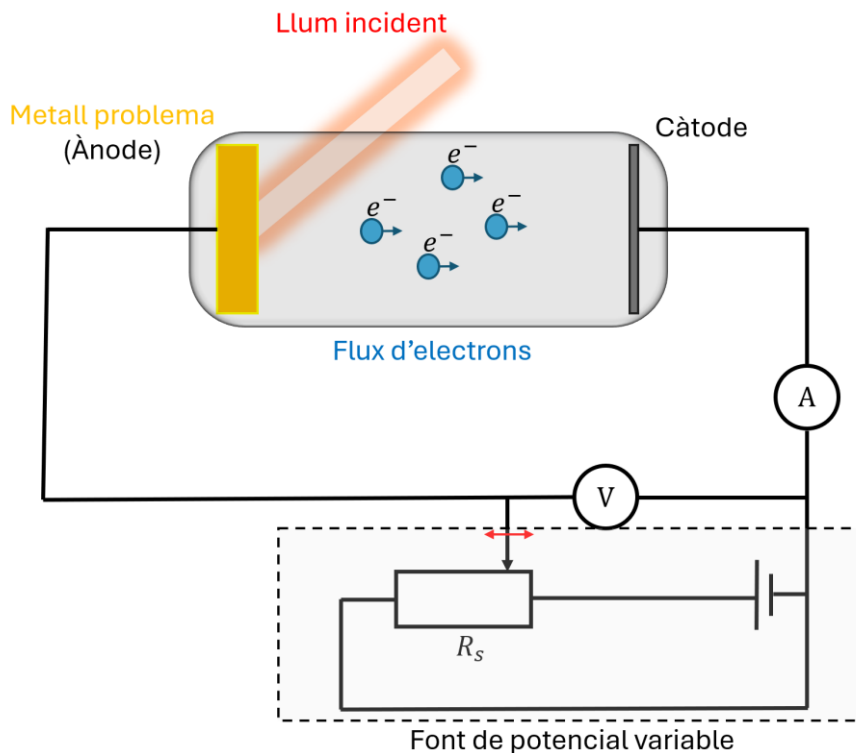


Figura 1. Esquema del muntatge experimental.

Els resultats de l'experiment amb un metall concret es mostren a la taula següent, on les tres darreres files mostren les longituds d'ona per les quals no s'ha registrat cap corrent elèctric i, per tant, no s'ha aplicat cap potencial per a frenar els electrons.

λ (nm)	V_s (mV)
230	700
235	576
240	466
245	360
250	259
255	162
260	61
265	-
270	-
275	-

Taula 1. Valors experimentals.

¹ Podeu veure un vídeo d'una experiència similar en aquest enllaç: [Efecte Fotoelèctric](#).

A partir de les dades de la **Taula 1**, i tenint en compte uns valors de $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s per a la velocitat de la llum i de $q = |e| = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C per a la càrrega de l'electró:

- Doneu una relació matemàtica entre l'energia cinètica dels electrons i el potencial de frenada, V_s (Ajut: feu servir el Teorema del Treball i l'Energia Cinètica).
- Completeu la Taula 1 adjunta amb dues columnes corresponents a la freqüència dels fotons, ν , i a l'energia cinètica dels electrons emesos, E_c , respectivament. Nota: doneu com a màxim dues xifres significatives.
- Representeu gràficament l'energia cinètica dels electrons emesos en funció de la freqüència de la radiació incident i ajusteu una recta a la representació gràfica. Feu servir els fulls mil·limetrats que teniu disponibles al Moodle per a fer les representacions gràfiques.
- En la representació gràfica de l'apartat anterior trobeu el pendent de la recta i el punt de tall amb l'eix horitzontal.
- Comparant la representació gràfica amb l'equació (1), trobeu la constant de Planck, h , i el treball d'extracció, W_0 , del metall emprat en l'experiment.
- Assumint un valor de referència per a la constant de Planck $h_{teo} = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J/Hz, doneu l'error relatiu en la mesura de la constant de Planck obtinguda en aquest experiment.
- A partir del valor de W_0 i de les dades de la **Taula 2**, que es mostra a continuació, identifiqueu el metall que s'ha fet servir en l'experiment. Noteu que a la Taula el treball d'extracció s'expressa en electronvolts, eV ($1 \text{ eV} = 1.60 \cdot 10^{-19}$ J).

Metall	W_0 (eV)
Calci	2.90
Magnesi	3.68
Cadmi	4.07
Alumini	4.08
Plata	4.26
Zinc	4.30
Coure	4.70
Níquel	5.01
Seleni	5.11

Taula 2. Treball d'extracció de diferents metalls.

SOLUCIÓ:

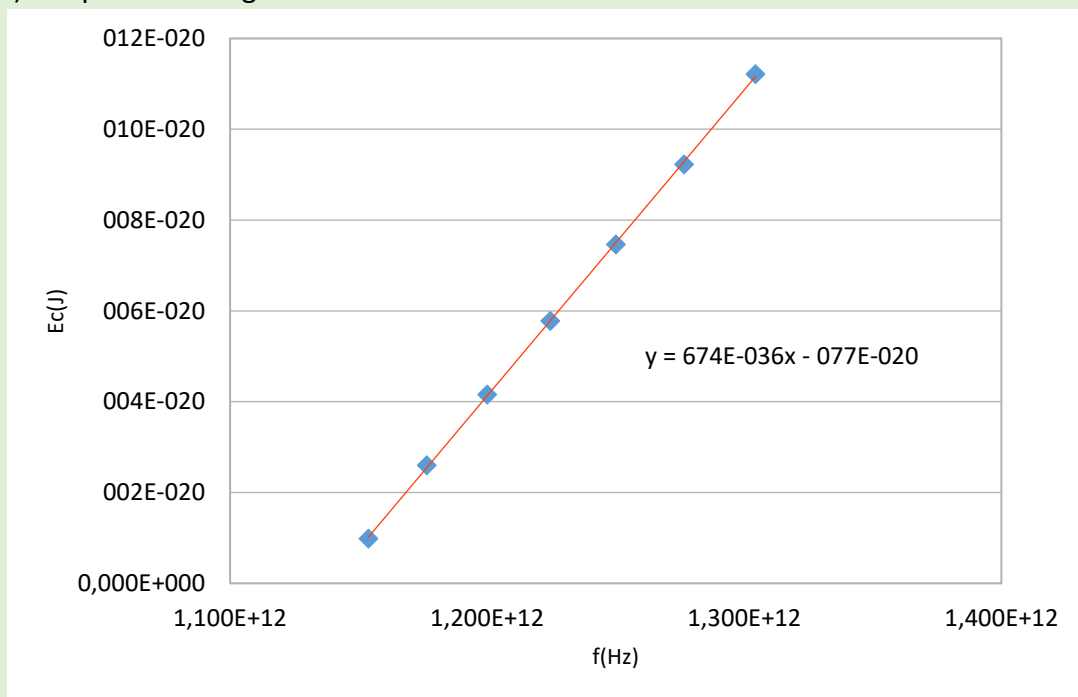
a) Senzillament:

$$\Delta E_c = W_e = qV_s \Rightarrow E_{cf} = qV_s$$

b) A partir de les dades donades a l'enunciat, de la relació entre λ i ν , i de l'expressió escrita en l'apartat a), es pot completar la taula com segueix:

λ (nm)	V_s (mV)	ν (Hz)	E_c (J)
230	700	$1.30 \cdot 10^{15}$	$1.12 \cdot 10^{-19}$
235	576	$1.28 \cdot 10^{15}$	$9.23 \cdot 10^{-20}$
240	466	$1.25 \cdot 10^{15}$	$7.47 \cdot 10^{-20}$
245	360	$1.22 \cdot 10^{15}$	$5.78 \cdot 10^{-20}$
250	259	$1.20 \cdot 10^{15}$	$4.16 \cdot 10^{-20}$
255	162	$1.18 \cdot 10^{15}$	$2.60 \cdot 10^{-20}$
260	61	$1.15 \cdot 10^{15}$	$9.83 \cdot 10^{-21}$
265	-	-	-
270	-	-	-
275	-	-	-

c) Representació gràfica:



d) Apartat c).

e) $h = 6.74 \cdot 10^{-36}$ J/Hz, $W_0 = 4.71$ eV

f) L'error relatiu serà:

$$\varepsilon_r(\%) = \frac{|h_{ex} - h_{teo}|}{h_{ex}} \cdot 100\% = 1.7\%$$

g) El metall emprat en l'experiment és el Coure.

2. Un equip d'enginyers està treballant en el desenvolupament d'un satèl·lit artificial. En la primera part de la fase de disseny i derivació de requisits, volen conèixer expressions matemàtiques bàsiques de la mecànica orbital del satèl·lit:

- Obtingueu una expressió matemàtica del període d'una òrbita (suposada circular de radi r) del satèl·lit entorn d'un objecte esfèric de massa M i radi R .
- Determineu una expressió matemàtica per a la velocitat del satèl·lit en l'òrbita de l'apartat a) i per a la seva energia mecànica.

En la segona fase de derivació de requisits de missió volen fer una comparativa dels paràmetres velocitat i període orbitals, i energia potencial gravitatòria del satèl·lit en els casos en que aquest es trobi orbitant la Terra o la Lluna. Per a fer-ho, assumeixen que l'òrbita del satèl·lit és molt baixa en comparació amb els radis d'aquests objectes.

- Sabent que el radi de la Terra és $R_T \approx 6400$ km i que el de la Lluna és $R_{LL} \approx 1740$ km i que el valor del camp gravitatori sobre la superfície terrestre és de $g_T \approx 9.8$ m/s² i en el cas de la Lluna es pot assumir que és d'una sisena part del de la Terra, feu una taula on es comparin els valors de velocitat (en m/s) i període orbital (en s) i d'energia mecànica (en J) per als casos en que el satèl·lit orbiti la Terra o la Lluna.
- En el cas que es volgués seguir una òrbita geoestacionària, quina seria l'alçada d'òrbita (mesurada respecte la superfície terrestre) i la corresponent energia potencial gravitatòria?
- Una de les enginyeres de l'equip de disseny es pregunta a quina distància de la Terra sobre la línia que uneix la Terra amb la Lluna s'anul·laria el potencial gravitatori i que passaria si el satèl·lit es trobés en aquest punt. Determineu la posició d'aquest punt respecte la Terra en funció de la distància Terra-Lluna d_{TL} , i feu una representació gràfica del potencial gravitatori entorn d'aquest punt. Quin seria el moviment del satèl·lit en punts propers a la posició que interessa a la nostra enginyera?

SOLUCIÓ:

- a) De la Segona Llei de Newton, tenim que:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow G \frac{Mm}{r^2} = ma_c = m \frac{v^2}{r}$$

Com que la velocitat ha de complir que en una volta es completa un període, tindrem que: $v = 2\pi r/T$, i per tant:

$$T = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

- b) Simplement, de l'apartat anterior obtenim que:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Aplicant la conservació de l'energia mecànica obtenim:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} = -G \frac{Mm}{r}$$

- c) Com que:

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow GM = gR^2$$

Podem realitzar els càlculs demanats a partir de les expressions que hem obtingut en a) i b) sense necessitat de conèixer G ni M_T , M_L . Numèricament obtenim la taula següent:

	v (m/s)	T (s)	E (J)
Terra	7919	5058	$-3.20 \cdot 10^{10}$
Lluna	1680	6511	$-1.42 \cdot 10^9$

- d) Per a l'òrbita geoestacionària tindrem que $T = 24h = 86400$ s, i, aplicant la Tercera Llei de Kepler, obtindrem:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{r^3}{GM_T} \Rightarrow r_{geo} = \sqrt[3]{\frac{g_T R_T^2}{4\pi^2} T^2} = 35785 \text{ km}$$

I, per tant:

$$E_{geo} = -5.608 \cdot 10^9 \text{ J}$$

e) Simplement, si el camp gravitatori s'anul·la, tindrem que:

$$F_{TL}(r_T) = F_{LT}(d_{TL} - r_T) \Rightarrow \frac{M_T G}{r_T^2} = \frac{M_L G}{(d_{TL} - r_T)^2} \Rightarrow \dots \Rightarrow r_t = \frac{\frac{R_T}{R_L} \sqrt{\frac{g_T}{g_L}}}{1 + \frac{R_T}{R_L} \sqrt{\frac{g_T}{g_L}}} d_{TL}$$

3. L'efecte fona (*slingshot effect* o maniobra d'assistència gravitatòria) és un fenomen físic emprat en la propulsió de naus en viatges interplanetaris.

Aquesta maniobra es realitza per tal d'aconseguir un augment de velocitat i/o un canvi de direcció d'una nau espacial mentre passa prop d'un planeta. Quan s'hi acostava, controlant l'aproximació, la nau espacial queda atrapada pel camp gravitatori del planeta i gira al seu voltant. La velocitat adquirida en l'òrbita és suficient per llançar la nau espacial de nou cap enfora, allunyant-se del planeta.

Aquest fenomen tan interessant a escala planetària es pot demostrar de forma casolana mitjançant dues pilotes de mides diferents, tal i com poden ser una de bàsquet i una de tenis.

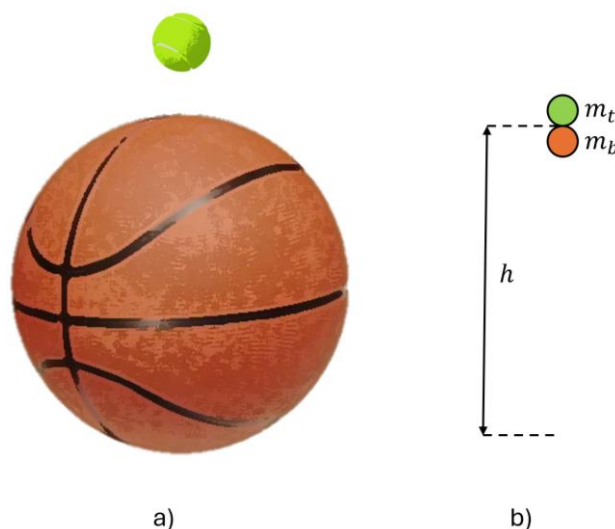


Figura 2. Esquemes del Problema 3.

Prenem dues pilotes, una de bàsquet i una de tenis, amb les seves masses reglamentàries de 600 g i 58 g, respectivament. Sostenim la pilota de tenis al damunt de la de bàsquet, separades una petita distància tal com es mostra a la **Figura 2.a**, a una altura de 1 m sobre el terra i les deixem caure lliurement alhora. La pilota de bàsquet rebota a terra i després xoca amb la pilota de tenis que surt impulsada cap amunt. Suposant que les velocitats de les pilotes tenen només components verticals:

- Feu un esquema de tot el procés. **Nota:** tant per a l'esquema, com per a tota la resolució del problema, preneu l'esquema teòric de la Figura 2 b), amb les assumpcions i aproximacions pertinents.
- Determineu l'alçada màxima que assoleix la pilota de tenis.
- Determineu l'alçada màxima que assoleix la pilota de bàsquet.

Nota: Considereu negligibles els efectes del fregament amb l'aire i les dimensions de les pilotes.

SOLUCIÓ:

a) –

b) Prenent el sentit vertical cap amunt com a positiu, podem escriure que, en el xoc elàstic es té: $v_b^x = -\sqrt{2gh}$ i que $v_t^x = -v_t^0$ (el superíndex x es refereix al xoc), de manera que, a partir de la conservació de la quantitat de moviment s'obté que:

$$v_t^{xf} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}$$

$$v_b^{xf} = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}$$

On el superíndex xf es refereix a "després del xoc".

Si tenim en compte ara que ens demanen les alçades màximes després del xoc, cosa que serà quan $v_t^f = v_b^f = 0$ m/s i tenint en compte que després del xoc les dues pilotes seguiran un MRUA sota l'acció de la gravetat amb velocitats inicials v_i^{xf} , podem escriure:

$$h'_i = \frac{(v_i^{xf})^2}{2g}$$

I, per tant:

$$h'_b = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} h \approx 7 \text{ m}$$

c) De la mateixa manera que amb la pilota de bàsquet, tindrem:

$$h'_t = 0.42 \text{ m} = 42 \text{ cm}$$