Problema 1. Una introducció a les nanes blanques.

Les estrelles més comunes (anomenades estrelles de la *seqüència principal*) cremen hidrogen (H) en el seu interior, de tal manera que es mantenen en el que es coneix om a equilibri hidroestàtic: la força de la gravetat tendeix a compactar i contreure la estrella, mentre que l'energia tèrmica alliberada en la crema de H (reaccions de fusió nuclear) empeny el material estel·lar cap a l'exterior. Aquesta situació d'equilibri és manté durant milers de millors d'any mentre l'estrella en seqüència principal continua cremant H.

Aquesta crema de H es un procés de fusió nuclear, mitjançant el qual, a partir d'àtoms de H es generen àtoms d'elements més pesats, com heli (He), carboni (C) i oxigen (O), entre altres.

El ritme al que una estrella crema H és directament proporcional a la seva massa, així, estrelles més massives cremen mes ràpid el seu combustible i, per tant, abandonen abans la fase de seqüència principal, passant a altres etapes evolutives. Les estrelles amb masses superiors a 7 $M_\odot$ (on $M_\odot$ correspon a la massa del nostre Sol), un cop acaben amb la crema de H, passen a na etapa que es coneix com fase de *nana blanca*.

Aquestes estrelles han perdut gran part de la seva massa i han consumit tot el H i He del seu nucli, de manera que es queden amb nuclis de C i O. No obstant, la fusió d'aquests dos elements ja no és capaç de generar prou energia per a compensar la força de la gravetat, de manera que l'estrella comença a col·lapsar: es va comprimint i compactant cada vegada més i més fins a tenir unes dimensions molt inferiors a les originals. En aquest procés, però, apareix una nova font d'energia que és capaç de compensar l'atracció gravitatòria: a causa de la compactació de l'estrella, comencen a aflorar efectes quàntics que generen el que s'anomena una *pressió de gas d'electrons degenerats*, a la qual correspon la següent expressió matemàtica:

$$P_d = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{4}{3}}$$

Essent N el nombre de protons que hi ha en la nana blanca, que es pot relacionar directament amb la massa M de l'estrella mitjançant l'expressió: $M = Nm_p$, on m_p és la massa del protó. Aquesta pressió, junt amb l'energia alliberada en la fusió compensa la pressió gravitatòria, que ve donada per l'expressió següent:

$$P_g = \frac{GM^2}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{3V}\right)^{\frac{4}{3}}$$

De manera que la nana blanca pot seguir "vivint" durant molts més milions d'anys, tot i no tenir H per Amb els models estel·lars actuals, se sap que les nanes blanques poden tenir un valor màxim de la seva massa (el que es coneix com a *límit de Chandrasekhar*), a partir del qual la pressió del gas d'electrons degenerats no és capaç de compensar la força gravitatòria, fent que la nana blanca acabi col·lapsant i desapareixent (bé en forma de forat negre o d'explosió de supernova). Sabent això:

a) Determina el valor de la massa màxima de les nanes blanques $M_{màx}$. Expressa el resultat en $M_\odot$. (Ajut: considera que l'energia tèrmica alliberada en la fusió de C i O és menyspreable)

b) Quin és el nombre N de protons presents en una nana blanca amb aquesta massa màxima?

Considera ara una nana blanca que té la meitat de la massa establerta pel límit de Chandrasekhar. Aquesta nana blanca té un radi de 10^4 km i al seu voltant, a una distància de 1.5 U. A, hi orbita un planeta de massa dues vegades la massa de la Terra, i amb la meitat de volum. L'òrbita del planera és aproximadament circular (Ajut: recorda que 1 U. A és la distància mitja de la Terra al Sol).

c) Determina la densitat de la nana blanca i expressa el resultat en $\mathrm{g/cm^3}$. Compara aquest resultat amb la densitat del Sol i amb la densitat de la Terra. Quina conclusió en podem treure?

d) Determina el període de rotació del planeta entorn la nana blanca. Compara el resultat amb el període de l'òrbita terrestre entorn al Sol. Quina relació hi ha entre aquests dos valors?

e) Si volem col·locar un satèl·lit que monitoritzi tant l'estrella com el planeta, però de tal forma que es mantingui estàtic entre l'estrella i el planeta, a quina distància del planeta hauríem de col·locar aquest satèl·lit? Expressa el resultat en U. A.

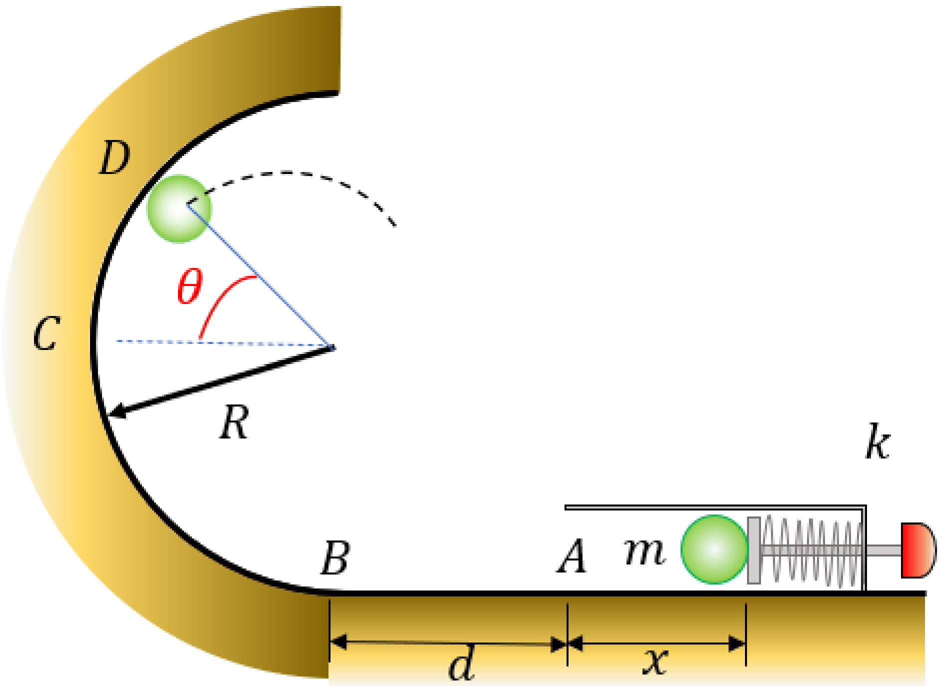
f) Quina és l'energia mínima que hauríem de subministrar al satèl·lit per a col·locar-lo en aquest punt?

Utilitza les dades donades en aquesta taula per a resoldre el problema:

Magnitud	**Lletra / Símbol**	**Valor numèric**
Constant de la Gravitació Universal	G	$6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N^2m^2/kg}$
Constant de Planck	h	$6.624 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}$
Velocitat de la llum en el buit	c	$3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$
Massa del protó	m_p	$1.673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Massa del Sol	$M_\odot$	$1.989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$
Massa de la Terra	M_T	$5.972 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$
Radi del Sol	$R_\odot$	$6.957 \cdot 10^{5}\ \mathrm{km}$
Radi de la Terra	R_T	$6371\ \mathrm{km}$

Problema 2. Un looping amb tir parabòlic.

El mateix professor de Física d'un dels problemes de la Fase 0 de l'OCF, el qual dissenya i construeix dispositius per a joguines en els eu temps lliure, està fent unes proves amb un *looping* al seu taller, com el que s'il·lustra a la següent figura:



La idea d'aquest dispositiu és emprar la molla per a disparar bales d'un kg per a que recorrin el looping. Per a fer-ho, es comprimeix la molla una certa distància x i s'allibera per a que porti la partícula fins a un cert punt A, en el qual la partícula es desprèn de la molla i continua movent-se per el pla horitzontal una certa distancia d fins a arribar al punt B, on comença a pujar per l'arc BCD del looping, que té un radi $R = 1\ \mathrm{m}$. Un cop la partícula arriba al punt D, la posició del qual esta definida per l'angle θ, es desprèn de l'arc i segueix una trajectòria parabòlica. Considerant que no hi ha fregament a cap de les superfícies, si sabem que el mòdul de la velocitat de la bala en el punt més alt del moviment és de $2.7\ \mathrm{m/s}$, determina:

a) El valor de l'angle θ.
b) El mòdul de la velocitat en el punt B.
c) El treball realitzar per la força elàstica de la molla sobre la partícula, des de la posició de compressió màxima gins al punt A.
d) L'abast de la bala un cop s'ha després de l'arc (Aclariment: l'abast es considera la distància horitzontal recorreguda des del punt C).

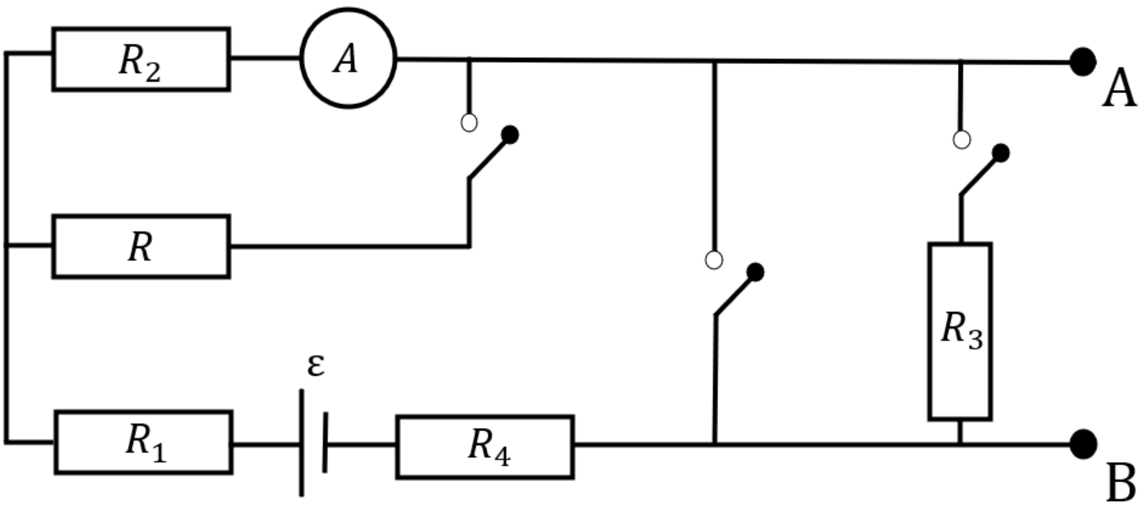
Si ara considerem que hi ha un coeficient de fregament dinàmic $\mu_d = 0.7$ entre la bala i les superfícies horitzontals, però no al llarg de l'arc:

e) Quina seria la compressió màxima x' que li hauríem de donar a la molla, per a que es complís la condició original (velocitat i angle θ anteriors).

Problema 3. Un circuit curiós.

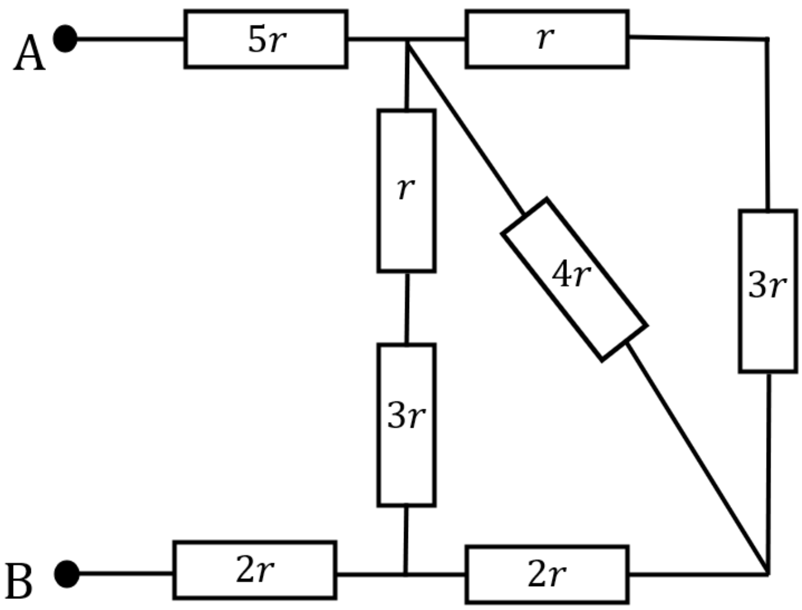
Una enginyera electrònica treballa amb circuits bàsics per a fer les primeres aproximacions als seus dispositius d'il·luminació finals. Per a fer-ho, simula els dispositius fotoemissors com a resistències.

Està fent un encàrrec per a un client on ha establert el dispositiu mostrat a la següent figura:



On tenim que: $\varepsilon = 4.5$ V, $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 50\ \Omega$ i $R_4 = 100\ \Omega$.

I el client li ha demanat que, en connectar entre els punts A i B el següent conjunt de resistències:



l'amperímetre indiqui el mateix valor tant quan els interruptors estan oberts que quan estan tancats. El valor de la resistència r és de 5 Ω.

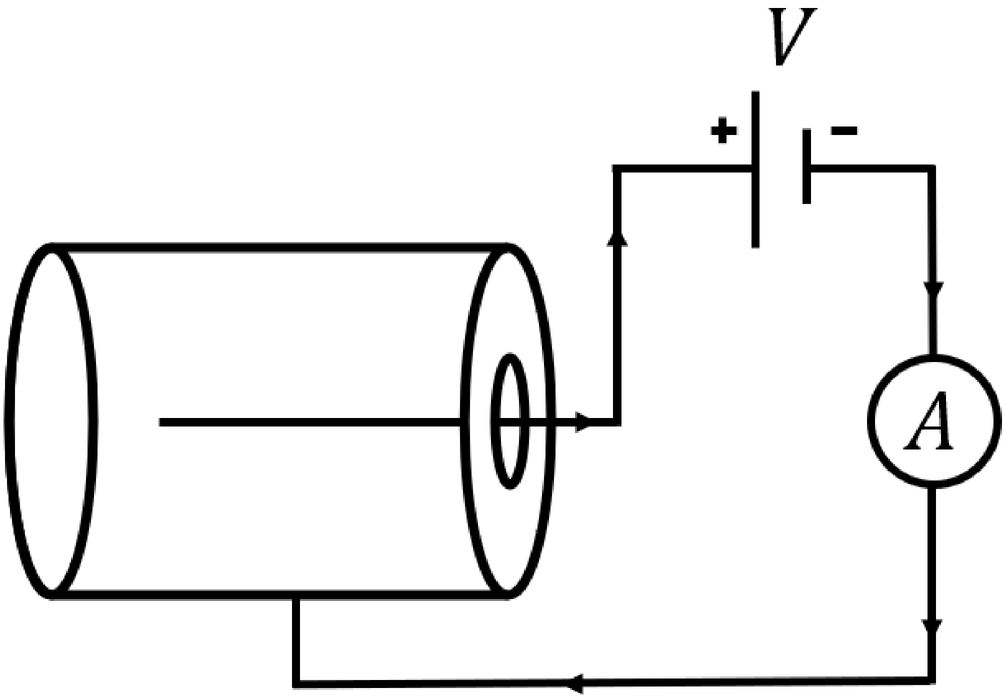
Sabent aquesta informació, determina:

a) La resistència equivalent del conjunt de resistències entre A i B.
b) El valor de la resistència R.
c) El valor de la intensitat de corrent elèctric I que marca l'amperímetre.
d) Si disposem d'una caixa de resistències amb 10 resistències de $2\ \Omega$, 10 de $2\ \mathrm{k}\Omega$ i 10 de $4\ \mathrm{k}\Omega$, com hauríem d'associar i quantes resistències necessitaríem per aconseguir el valor de R determinat a l'apartat b).

Problema 4 (experimental). Mesures amb una cambra de ionització. Vida mitjana de l'isòtop Rn ^{220}.

Una *cambra de ionització* es un instrument que permet mesurar l'activitat d'una mostra radioactiva. Una estudiant de grau de Física prepara, per al seu Treball Final de Grau, una cambra de ionització casolana. Per a fer-ho fa servir un pot cilíndric metàl·lic, amb una única tapa en la qual hi practica un petit forat, pel qual hi fa passar un filament metàl·lic, axial i aïllat elèctricament del pot. L'altre extrem del pot el tapa amb un tros de paper d'alumini.

Mitjançant una pila estableix una diferència de potencial entre la paret del pot i el filament (vegeu la figura).



La nostra estudiant de Física sap que les partícules ionitzants produïdes per una substància, especialment les partícules conegudes com a partícules alfa, donen lloc a un gran nombre de ions en les col·lisions amb les molècules de l'aire, de manera que circularà un petit corrent elèctric pel filament, que serà detectable amb algun circuit electrònic senzill: mesurarà la diferència de potencial que el corrent establirà en una resistència coneguda. Com que sap que aquesta diferència de potencial és proporcional a la quantitat de ions que s'han produït dins la cambra de ionització i al nombre partícules que han provocat la ionització, sap que podrà mesurar-ho correctament.

La estudiant també sap que, en una cambra de ionització només es pot detectar el corrent produït per un nombre relativament gran de partícules i permet mesurar com varia l'activitat d'una substància radioactiva (l'activitat és el nombre de desintegracions per unitat de temps). De fet, aquest és l'objectiu del seu TFG: estudiar el ritme de desintegració del radó 220 (Rn^{220}).

El tori (Th) és un element radioactiu que majoritàriament està format per l'isòtop Th^{232} . En successives desintegracions aquest isòtop en dona lloc a altres que també són radioactius, en el que s'anomena la sèrie de tori, que acaba en l'isòtop estable Pb^{208} . Un dels membre de la sèrie és el Rn^{220} que és un gas (Rutherford el va anomenar "emanació del tori") que s'acumula en els recipients tancats que continguin minerals o compostos de tori.
El Rn^{220} és un emissor alfa que es desintegra ràpidament. Es pot observar com a l'injectar una mostra de l'aire de dins d'un recipient on hi ha un mineral de tori a una cambra de ionització, la intensitat del corrent (i la tensió que aquest corrent provoca en una resistència) disminueixen ràpidament, tal com es mostra a la taula de resultats de la nostra estudiant:

t (s)	V (V)
0	6.5
20	5.1
40	3.9
60	3
80	2.4
100	1.7
120	1.3
140	1.1
160	0.8
180	0.7
200	0.5
220	0.4
240	0.3

El paràmetre que determina la rapidesa amb que una mostra radioactiva es desintegra s'anomena *vida mitjana*: és el que triga una mostra de N_0 nuclis a desintegrar-se fins que en queden la meitat. Cada vegada que transcorre una mida mitjana (T) la població de nuclis radioactius que queda a la mostra (N) s'ha dividit per 2; per tant, com que al cap d'un temps t hauran passat t/T vides mitjanes, la relació entre els nuclis que queden sense desintegrar i el temps transcorregut és:

$$N(t) = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}}$$

Com que l'activitat radioactiva de la mostra (i la tensió mesurada en la cambra d'e ionització) és proporcional al nombre de nuclis radioactius que hi queden, la tensió mesurada en la cambra de ionització variarà segons:

$$V = \frac{V_0}{2^{\frac{t}{T}}}$$

Considerant les dades obtingudes per la estudiant, transformant la segona expressió en alguna altra que mostri una dependència lineal entre una expressió de V i una altra de t, a partir de la representació gràfica adient, calcula la vida mitjana (T) del Rn^{220}.